

Sur les propriétés diamétrales de la conique gauche.

Par **D. Mordoukhay-Boltovskoy** (Rostov-Don).

§ 1. Nous avons deux concepts analogues de la courbe du second ordre dans l'espace: 1) la surface du second ordre, 2) la conique gauche, c'est-à-dire la courbe qui est coupée par chaque plan en trois points. Au diamètre de la courbe ¹⁾ du second ordre pour la surface du second ordre correspondent 1) le plan diamétral — lieu des milieux des cordes parallèles ou 2) la droite diamétrale (diamètre)—lieu des centres des sections parallèles. Dans la théorie de la conique gauche on peut indiquer le concept analogue. Nous allons démontrer ²⁾ que le lieu des centres moyen-arithmétiques des points d'intersection qui sont définis par les coordonnées

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \quad (1)$$

est une droite qui sera appelée diamètre.

Pour démontrer cette propriété rappelons nous que la cubique ³⁾ représente l'intersection de deux surfaces du second ordre avec une génératrice rectiligne commune.

Prenons pour l'axe z cette génératrice et pour le plan XY un plan parallèle au plan sécant. L'équation, qui définit les valeurs des x pour les points d'intersection $(x_1, x_2, x_3, x_4=0)$, s'obtient par élimination de y entre les équations suivantes:

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y = 0, \quad (2)$$

$$A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y = 0. \quad (3)$$

¹⁾ La bibliographie sur les propriétés diamétrales des courbes algébriques:

Newtoni Enumeratio linearum tertii ordinis.

Cotes. Harmonia mensurarum.

Poncelet. Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques. Journal de Crelle. XIII, 1828, p. 279.

Bobilier. Théorèmes sur les polaires successives. Annales de Gergonne. 1828-29.

Salmon-Fiedler. Analytische Geometrie der höheren Kurven. Leipzig. 1882.

D. M.—Boltovskoy. Les diamètres quadratiques des courbes planes du 3 ordre. Les travaux de l'Assoc. des Inst. Scient. de N. Caucase. № 1. 1926.

²⁾ Les propriétés diamétrales des courbes gauches, à ce qu'il me paraît, n'avaient pas été discutées avant ma petite note: D. M. Boltovskoy. Deux théorèmes sur les courbes algébriques.

³⁾ Nous emploierons deux nominations: conique gauche et plus courte — cubique.

L'élimination de y par la méthode de Sylvester donne

$$\begin{vmatrix} C_1, 2(B_1x + E_1), & A_1x^2 + 2D_1x, & 0 \\ C_2, 2(B_2x + E_2), & A_2x^2 + 2D_2x, & 0 \\ 0, C_1, & 2(B_1x + E_1), & A_1x^2 + 2D_1x \\ 0, C_2, & 2(B_2x + E_2), & A_2x^2 + 2D_2x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{ou } \{4(B_1A_2 - B_2A_1)(B_2C_1 - B_1C_2) - (A_2C_1 - A_1C_2)^2\} x^3 + \{4(E_2C_1 - E_1C_2)(B_1A_2 - B_2A_1) + \\ + 4(B_2C_1 - B_1C_2)[(E_1A_2 - E_2A_1) + (B_1D_2 - B_2D_1)] + \\ + 2(A_2C_1 - A_1C_2)(C_1D_2 - C_2D_1)\} x^2 + \dots = 0, \quad (4)$$

$$\text{où } A_1 = a_1, B_1 = f_1, C_1 = b_1, D_1 = d_1\gamma + h_1, E_1 = e_1\gamma + g_1,$$

$$A_2 = a_2, B_2 = f_2, C_2 = b_2, D_2 = d_2\gamma + h_2, E_2 = e_2\gamma + g_2,$$

en prenant pour les équations des surfaces (qui passent par $(0,0)$ et contiennent la droite $x=0, y=0$)

$$a_1x^2 + b_1y^2 + 2d_1yz + 2e_1xz + 2f_1xy + 2g_1x + 2h_1y = 0, \quad (2')$$

$$a_2x^2 + b_2y^2 + 2d_2yz + 2e_2xz + 2f_2xy + 2g_2x + 2h_2y = 0, \quad (3')$$

$$\text{et pour l'équation du plan sécant } z = \gamma. \quad (5)$$

Or le coefficient de x^3 ne dépend pas du γ et le coefficient de x^2 est du premier ordre par rapport au γ . Nous avons donc

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = p\gamma + q,$$

et de même

$$\bar{y} = p''\gamma + q',$$

$$\bar{z} = p''\gamma + q'', \quad (p'' = 1, q'' = 0)$$

d'où l'on tire les relations linéaires entre $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, qui définissent une droite.

§ 2. La conique gauche s'obtient par l'intersection de deux surfaces du second ordre avec une génératrice commune et se définit par deux équations:

$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + 2d_1yz + 2e_1xz + 2f_1xy + 2g_1x + 2h_1y + 2i_1z + k_1 = 0, \quad (6)$$

$$a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 + 2d_2yz + 2e_2xz + 2f_2xy + 2g_2x + 2h_2y + 2i_2z + k_2 = 0, \quad (7)$$

où a_1, b_1, \dots, k_2 sont liés par l'équation

$$H(a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots) = 0. \quad (8)$$

En vertu de la loi de dualité la conique gauche peut être définie par le système de plans tangents à deux surfaces du 2^e ordre avec une génératrice commune, qui sont des plans osculateurs de la courbe et dont les coordonnées pluckeriennes satisfont à deux équations:

$$\bar{a}_1\xi^2 + \bar{b}_1\eta^2 + \bar{c}_1\zeta^2 + 2\bar{d}_1\eta\zeta + 2\bar{e}_1\xi\zeta + 2\bar{f}_1\xi\eta + 2\bar{g}_1\xi + 2\bar{h}_1\eta + 2\bar{i}_1\zeta + \bar{k}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\bar{a}_2\xi^2 + \bar{b}_2\eta^2 + \bar{c}_2\zeta^2 + 2\bar{d}_2\eta\zeta + 2\bar{e}_2\xi\zeta + 2\bar{f}_2\xi\eta + 2\bar{g}_2\xi + 2\bar{h}_2\eta + 2\bar{i}_2\zeta + \bar{k}_2 = 0, \quad (10)$$

où $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{k}_2$ sont liés par l'équation

$$H(\bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \dots) = 0. \quad (11)$$

Il résulte de ce qui précède, que si l'on ajoute aux équations (6) et (7)

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad (12)$$

et qu'on élimine (z, y) et ensuite (z, x) , on obtient une équation en x , qui donne

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \varphi(\gamma) \quad (13)$$

x_1, x_2, x_3 , étant des racines de cette équation, qui n'appartiennent pas au point situé sur la génératrice commune, et une équation en y , qui donne

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \psi(\gamma). \quad (14)$$

L'élimination de γ entre (14), (13) et

$$\bar{z} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \quad (\bar{12})$$

nous donne deux équations linéaires par rapport à $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Pour obtenir le théorème réciproque il faut produire les opérations formelles du § 1 sur (ξ, η) dans les équations (9), (10) et (11), qui s'obtiennent de (6), (7) et (8) par remplacement de (x, y, z) par (ξ, η, ζ) , de $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ par $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \dots)$.

Pour interpréter géométriquement le résultat de ces opérations formelles nous devons remarquer que deux points

$$\zeta = \bar{\alpha}\xi + \bar{\beta}\eta + \bar{\gamma}, \quad \zeta' = \bar{\alpha}'\xi + \bar{\beta}'\eta + \bar{\gamma}'$$

pour lesquels $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$, $\bar{\beta} = \bar{\beta}'$, sont situés sur une droite passant par l'origine des coordonnées et inversement, et établir ensuite le concept du plan moyen-arithmétique des plans $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$ par rapport au point O en le définissant par les formules:

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n}{n}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n}{n}. \quad (15)$$

et en établissant l'indépendance de cette définition de la direction des axes des coordonnées, c'est-à-dire la dépendance seulement de O .

Voici la construction du plan moyen-arithmétique: sur les trois droites passant par O on prend les points d'intersection avec les plans donnés, puis les centres moyen-harmoniques de ces points relativement à O : A, B, C , et par ces points on mène le plan.

En définitive nous avons le théorème réciproque suivant:

Si l'on mène de différents points d'une droite les plans osculateurs à une conique gauche, les plans moyen-arithmétiques de ces plans par rapport à un point fixe passent par une droite.

§ 3. Eloignons la droite à l'infini. Il y aura alors des plans osculateurs parallèles à des droites situées sur le plan passant par cette droite à l'infini. Avec l'éloignement du point O à l'infini le centre moyen-géométrique de A_1, A_2, A_3 par rapport à O se ramène au centre moyen-arithmétique et le plan moyen-arithmétique devient le lieu géométrique des points d'intersection des plans par les rayons d'une gerbe de droites parallèles. En appelant le plan (ainsi construit) sur les trois plans (P_1, P_2, P_3) parallèles à la droite l et sur une gerbe parallèle à \bar{l} —plan du milieu dans la direction l , nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Tous les plans du milieu dans la même direction \bar{l} de trois plans osculateurs π_1, π_2, π_3 , parallèles aux droites l situées dans un plan π passent par une droite.

Si l'on éloigne le point O à l'infini en laissant la droite à distance finie, en établissant de la même manière la définition du plan du milieu dans la direction l pour les trois plans se coupant dans un point, on pourra encore énoncer, que

Si l'on mène par les points d'une droite l les trois plans osculateurs à une conique gauche, les plans du milieu dans la même direction passent par une droite.

§ 4. En remplaçant les plans sécants par des surfaces du second ordre nous obtenons les diamètres quadratiques de la cubique gauche.

Coupons la cubique par un faisceau de surfaces du second ordre passant par 1) une conique et 2) par une conique à l'infini, c'est-à-dire ayant les cônes asymptotiques avec les génératrices correspondantes parallèles

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (16)$$

A, B, C étant des constantes, $D = dz + h$, $E = ez + g$, $F = kz^2 + lz + m + \lambda z$, λ — paramètre variable. La conique, qui définit le faisceau, est donnée par le système d'équations

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (17)$$

$$z = 0, \quad (18)$$

et les coefficients angulaires des génératrices

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

par l'équation

$$Am^2 + 2Bmn + Cn^2 + 2dmp + 2e\bar{n}p = 0. \quad (19)$$

La cubique (2), (3) est coupée par la surface (16) en $8 - 2 = 6$ points, parce qu'on doit rejeter les points sur la génératrice commune à deux surfaces déterminantes. En éliminant x des équations (16), (2), (3) nous obtenons

$$a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 = 0, \quad b_0y^4 + b_1y^3 + b_2y^2 + b_3y + b_4 = 0, \quad (20)$$

où

$$a_0 = (AC)_1^2,$$

$$a_1 = 4(AC)_1(AE)_1 + [2(BE)_1 + (DC)_1](BA)_1 + (DA)_1(BC)_1,$$

$$a_2 = 4(AE)_1 + 2(AC)_1(AF)_1 + (BA)_1[(BF)_1 + 2(DE)_1] + [2(BE)_1 + (DG)_1](DA)_1, \quad (21)$$

$$a_3 = 4(AE)_1(AF)_1 + (DF)_1(AB)_1 + (DA)_1[(BF)_1 + 2(DE)_1],$$

$$a_4 = (AF)_1^2 + (DA)_1(DF)_1.$$

Le sens du symbole $(XY)_1$ est le suivant: $XY_1 - X_1Y$. De la même façon on exprime b_0, \dots, b_4 en $A_1, B_1, \dots; A_2, B_2, \dots$

Il est nécessaire maintenant de faire une remarque bien importante pour ce qui suit. Si λ n'entre pas dans c_0, d_0 et qu'il n'entre qu'en première puissance dans c_1, d_1 de sorte que

$$c_1 = c_1^{(1)}\lambda + c_0^{(1)}, \quad d_1 = d_1^{(1)}\lambda + d_0^{(1)}$$

le coefficient du second terme du polynome

$$\Omega = (c_0 z^k + c_1 z^{k-1} + \dots)^p (d_0 z^l + d_1 z^{l-1} + \dots)^q$$

ne contient λ qu'en première puissance. En effet

$$\Omega = c_0^p d_0^q z^{pk+ql} (q c_0^p d_0^{q-1} d_1 + p c_0^{p-1} d_0^q c_1) z^{p(k+q)l-1} + \dots,$$

où
$$q c_0^p d_0^{q-1} d_1 + p c_0^{p-1} d_0^q c_1 = M\lambda + N,$$

$$M = c_1^{(1)} q c_0^p d_0^{q-1} + d_1^{(1)} p c_0^{p-1} d_0^q, \quad N = c_0^{(1)} q c_0^p d_0^{q-1} + d_0^{(1)} p c_0^{p-1} d_0^q.$$

La même chose a lieu pour le produit de plusieurs multiplicateurs

$$\prod_{i=1}^{i=s} (c_{0i} z^{k_i} + c_{1i} z^{k_i-1} + \dots)^{p_i} = C_0 z^l + C_1 z^{l-1} + \dots$$

Si c_{0i} ne contient pas λ , c_{1i} ne le contient qu'en première puissance, C_1 est linéaire par rapport à λ .

Dans le cas de deux paramètres, c'est-à-dire quand

$$c_1 = \bar{c}^{(1)} \lambda + \bar{c}^{(1)} \mu + c^{(1)}_0, \quad d_1 = \bar{d}^{(1)} \lambda + \bar{d}^{(1)} \mu + d^{(1)}_0,$$

on parvient de la même façon à l'expression de C_1 linéaire par rapport à λ et μ .

Cette remarque faite, on conclut

1) que $\delta_x(X_0 X_0)_1 = 0, \delta_x(X_0 X_1)_1 = 1, \delta_x(X_1 X_1)_1 = 2, \delta_x(X_0 X_2)_1 = 2, \delta_x(X_1 X_2)_1 = 3,$

$$\bar{\delta}_\lambda(X_0 X_0)_1 = 1, \bar{\delta}_\lambda(X_0 X_1)_1 = 1, \bar{\delta}_\lambda(X_1 X_1)_1 = 1, \bar{\delta}_\lambda(X_1 X_2)_1 = 1, \bar{\delta}_\lambda(X_1 X_2)_1 = 1,$$

si l'on désigne par $X_0: A, B, C$; par $X_1: D, E$; par $X_2: F$, par δ_x l'ordre par rapport à z et par $\bar{\delta}_\lambda$ l'ordre du second terme par rapport à λ .

2) Ensuite en prenant

$$H = (X_0 X_0)_1^{m_{00}} (X_0 X_1)_1^{m_{01}} (X_0 X_1)_1^{m_{02}} \dots$$

on a
$$\delta_x H = m_{01} + 2m_{01} + 2m_{02} + 3m_{03} + \dots, \quad \bar{\delta}_\lambda H = 1.$$

3) En définitive

$$\delta_x a_0 = \delta_x b_0 = 0, \delta_x a_1 = \delta_x b_1 = 1, \delta_x a_2 = \delta_x b_2 = 2, \delta_x a_3 = \delta_x b_3 = 3, \delta_x a_4 = \delta_x b_4 = 4, \tag{22}$$

$$\bar{\delta}_\lambda a_2^{(1)} = 1, \bar{\delta}_\lambda a_3^{(1)} = 1, \bar{\delta}_\lambda a_4^{(1)} = 1.$$

En éliminant y des équations (20) nous avons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0, \tag{23}$$

$$a_i = (a_0 b_i), \beta_i = \sum_{g=0}^{g=i} (a_g b_{2+i-g}), \gamma_i = \sum_{g=0}^{g=i} (a_g b_{3+i-g}), \delta_i = (a_{i-1} b_4),$$

où $(a_i b_k) = a_i b_k - a_k b_i = p_{ik}^{(s)} z^s + p_{ik}^{(s-1)} z^{s-1} + \dots$

Cette équation est du 16 ordre par rapport à z ,

$$\delta_z \Delta = 16, \quad \bar{\delta}_\lambda (a_i b_k) = 1,$$

et par conséquent

$$\bar{\delta}_\lambda (a_i b_k)(a_s b_m) \dots = 1, \quad \bar{\delta}_\lambda \Delta = 1.$$

L'équation (23) ou

$$P_0 z^{16} + P_1 z^{15} + \dots + P_{16} = 0$$

a 16 racines, mais chaque racine est prise deux fois ¹⁾.

$$P_0 z^{16} + P_1 z^{15} + \dots = (Q_0 z^8 + Q_1 z^7 + \dots)^2,$$

$$Q_0^2 = P_0, \quad P_1 = 2Q_0 Q_1, \quad 2 \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{P_1}{P_0}.$$

Il faut se rappeler que deux points se trouvent sur la génératrice $x=0, y=0$.

Pour que ces points soient exclus il faut diviser $Q_0 z^8 + Q_1 z^7 + \dots$ par $kz^2 + (l + \lambda)z - m$. Les points restants sont définis par l'équation

$$\frac{Q_0}{k} z^6 + \frac{Q_1 k - (l + \lambda)Q_0}{k^2} z^5 + \dots = 0,$$

et

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_6}{6} = - \frac{Q_1 k - (l + \lambda)Q_0}{6kQ_0} = - \frac{P_1 k - 2(l + \lambda)P_0}{12P_0} \quad (24)$$

est linéaire par rapport à λ . De même \bar{x}, \bar{y} sont linéaires par rapport à λ . Pour obtenir \bar{x}, \bar{y} en λ il faut éliminer z des équations

$$az^2 + bz + c = 0, \quad (25)$$

$$b_1 z + c_1 = 0, \quad (26)$$

$$b_2 z + c_2 = 0, \quad (27)$$

où

$$a = k,$$

$$b = l + \lambda + 2dx + 2ey, \quad (28)$$

$$c = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2hx + 2gy,$$

$$b_1 = 2d_1 x + 2e_1 y,$$

¹⁾ Ordinairement la théorie d'élimination ne fait pas assez d'attention à ce point important. Nous donnerons la démonstration géométrique de cette proposition. Les projections des courbes d'intersection des surfaces $\Phi_1=0, \Phi_2=0, \Phi_3=0$ sont des courbes du 4 ordre, qui se coupent en 8 points, mais chaque point est le point double pour une des courbes et doit être compté pour deux. En effet, en déterminant ensuite de $y, z-x$ nous obtenons les solutions étrangères. En ramenant $\Phi_1=0, \Phi_2=0$ à $\theta_1(y,z)=0, \Phi_3=0$ et $\Phi_1=0, \Phi_2=0$ à $\theta_2(z,y)=0, \Phi_3=0$ nous voyons que les points correspondant aux solutions, que nous avons obtenues plus haut par élimination des équations deux à deux, se trouvent sur MN_1YZ du point dont y,z s'obtiennent des équations $\theta_1=0, \theta_2=0$. Donc les solutions sont distribuées par des paires qui correspondent à des valeurs égales de z

Ni Serret, ni Weber ne donnent aucune indication à ce sujet. Ce n'est que dans le livre de J. Petersen, Théorie des équations algébriques, Paris, 1897, p. 69, que nous trouvons une petite remarque là-dessus.

$$\begin{aligned} c_1 &= A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2h_1x + 2g_1y, \\ b_2 &= 2d_2x + 2e_2y, \\ c_2 &= A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2h_2x + 2g_2y. \end{aligned} \tag{28}$$

Les deux équations ou'on obtient par élimination

$$\begin{aligned} ac_1^2 - bb_1c_1 + b_1^2c &= 0, \\ ac_2^2 - bb_2c_2 + b_2^2c &= 0 \end{aligned}$$

sont de la forme

$$(R_0y^4 + R_1y^3 + R_2y^2 + R_3y + R_4) + (S_0y^3 + S_1y^2 + S_2y + S_3)(2dx + 2ey + l + \lambda) = 0,$$

où $\delta_x R_i = 1, \delta_x S_i = 1, \delta_\lambda R_i = 0, \delta_\lambda S_i = 0,$

et par conséquent de la forme

$$\begin{aligned} \alpha_0y^4 + \alpha_1y^3 + \alpha_2y^2 + \alpha_3y + \alpha_4 &= 0, \\ \delta_x \alpha_i &= i, \delta_\lambda \alpha_0 = 0, \delta_\lambda \alpha_1 = 1. \end{aligned}$$

On parvient alors au moyen des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits sur les équations (20) à l'expression de \bar{x} linéaire par rapport à λ .

Enfin
$$\begin{aligned} \bar{x} &= p\lambda + q, \\ \bar{y} &= p'\lambda + q', \\ \bar{z} &= p''\lambda + q''. \end{aligned}$$

Si p, p', p'' ne sont pas tous ensemble nuls—le lieu des points $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est une droite.

Si l'on coupe la cubique par un faisceau de surfaces du second ordre, passant par une conique et ayant pour les cônes asymptotiques le même cône transporté par une translation parallèle, le lieu des centres moyen-arithmétiques des points d'intersection est une droite.

Il n'est pas difficile de construire le théorème réciproque:

Soient π_i les plans moyen-arithmétiques par rapport à un point S des plans osculateurs à une cubique et tangents à des surfaces du second ordre, qui touchent deux cônes du second ordre, l'un avec le sommet en S . Tous ces plans π_i passent par une droite.

§ 5. On peut montrer une propriété des surfaces du second ordre qui se trouve dans le même rapport avec la propriété diamétrale 2) que celle de la cubique gauche du § 4 avec celle du § 2. Coupons la surface

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{29}$$

$$\delta_x A = \delta_x B = \delta_x C = 0, \delta_x D = \delta_x E = 1, \delta_x F = 2$$

par un faisceau de coniques gauches, ayant les asymptotes parallèles et passant par trois points donnés, dont les équations seront

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + \lambda z = 0, \tag{30}$$

$$A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + \mu z = 0, \tag{31}$$

si l'on prend pour le plan des points donnés— XY . On obtient de (29), (30), (31)

$$\begin{aligned} a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 &= 0, \\ b_0y^4 + b_1y^3 + b_2y^2 + b_3y + b_4 &= 0, \\ \delta_\lambda a_0 = \delta_\lambda b_0 = 0, \delta_\lambda a_1 = \delta_\lambda b_1 = 1, \end{aligned}$$

et par raisonnement analogue au § 4 on obtient $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ en fonction linéaire de λ, μ .

Le lieu géométrique des centres moyen-arithmétiques des points d'intersection d'une surface du second ordre par un faisceau de cubiques passant par trois points donnés avec des asymptotes parallèles est un plan.

Le théorème réciproque:

Soient π_i les plans moyen-arithmétiques par rapport à un point S des plans tangents à une surface du second ordre et osculateurs aux cubiques, qui sont données, trois passant par S . Tous ces plans π_i passent par un point.

§ 6. Par une transformation homographique

$$x = \frac{U(x')}{T(x')}, y = \frac{V(x')}{T(x')}, z = \frac{W(x')}{T(x')}, \quad (32)$$

où

$$\begin{aligned} U &= kx' + ly' + mz' + n, \\ V &= px' + qy' + rz' + s, \\ W &= ux' + vy' + wz' + t, \\ T &= ax' + by' + cz' + d, \end{aligned}$$

on réduit les équations, qui donnent le centre arithmétique

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i, \bar{z} = \frac{1}{n} \sum z_i,$$

à

$$\frac{U(\bar{x}')}{T(\bar{x}')} = \frac{1}{n} \sum \frac{U(x_i')}{T(x_i')}, \frac{V(\bar{x}')}{T(\bar{x}')} = \frac{1}{n} \sum \frac{V(x_i')}{T(x_i')}, \frac{W(\bar{x}')}{T(\bar{x}')} = \frac{1}{n} \sum \frac{W(x_i')}{T(x_i')}, \quad (33)$$

et si l'on ajoute encore l'identité

$$\frac{T(\bar{x}')}{T(\bar{x}')} = \frac{1}{n} \sum \frac{T(x_i')}{T(x_i')}, \quad (34)$$

on les réduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(\bar{x}')} &= \frac{1}{n} \sum \frac{1}{T(x_i')}, \quad \frac{\bar{x}'}{T(\bar{x}')} = \frac{1}{n} \sum \frac{x_i'}{T(x_i')}, \\ \frac{\bar{y}'}{T(\bar{y}')} &= \frac{1}{n} \sum \frac{y_i'}{T(y_i')}, \quad \frac{\bar{z}'}{T(\bar{z}')} = \frac{1}{n} \sum \frac{z_i'}{T(z_i')}. \end{aligned} \quad (35)$$

Le sens géométrique en est le suivant: en introduisant la notation: $d(M, \pi)$ —la distance du point M au plan π , π étant le plan donné, ρ un plan quelconque, on peut définir le point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, que nous appellerons centre moyen harmonique par rapport à π , par les équations suivantes

$$\frac{d(\bar{M}, \rho)}{d(\bar{M}, \pi)} = \frac{1}{n} \sum \frac{d(M_i, \rho)}{d(M_i, \pi)}. \quad (36)$$

La notion réciproque c'est le plan moyen harmonique des plans π_i par rapport à un point M . Au lieu de (36) nous avons

$$\frac{d(\bar{\pi}, N)}{d(\bar{\pi}, M)} = \frac{1}{n} \sum \frac{d(\pi_i, N)}{d(\pi_i, M)}, \quad (37)$$

M étant le point donné, N -arbitraire. On doit se servir au tableau suivant des notions réciproques

point M	plan π
plan π	point M
droite l	droite l
coord. cart. x, y, z	coord. pluck. ξ, η, ζ
$Ax + By + Cz + D = 0$	$\bar{A}\xi + \bar{B}\eta + \bar{C}\zeta + \bar{D} = 0$
$l \perp l'$	$l \perp l$ (plan $(O, l) \perp$ plan (O, l'))
$\pi \perp \pi'$	$M \perp M$ (droite $(OM) \perp$ droite (OM'))
$\pi \perp l$	$M \perp l$ (droite $(OM) \perp$ plan (Ol))

Il faut encore ajouter l'explication géométrique de la formule

$$d(\pi_1, \pi_2) = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2},$$

qui donne le concept réciproque à la distance de deux points qu'on peut appeler la distance de deux plans $\pi_1(\xi_1, \eta_1)$, $\pi_2(\xi_2, \eta_2)$ par rapport à O . Par le calcul élémentaire, mais assez compliqué (que nous omettons) ¹⁾ on obtient

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{1}{r_{12}} \frac{\text{Sin}(\pi_1, \pi_2)}{\text{Sin}(\pi_1, \pi) \text{Sin}(\pi_2, \pi)}, \quad (38)$$

r_{12} étant la distance de O au point d'intersection de la droite (π_1, π_2) avec le plan passant par O et \perp à (π_1, π_2) ; π est le plan passant par O et (π_1, π_2) . En développant les opérations réciproques à celles au moyen desquelles on obtient la distance du point au plan, on construit $d(\pi, M)$: 1) on mène le plan σ par $O \perp$ à OM , 2) par la droite l d'intersection de σ, π et par M —le plan τ ; alors la distance $d(\pi_1, M) = d(\pi_1, \sigma)$ et

$$d(\pi_1, \sigma) = \frac{1}{r} \frac{\text{Sin}(\pi, \sigma)}{\text{Sin}(\pi, \tau) \text{Sin}(\sigma, \tau)}, \quad (39)$$

r étant la distance OK , où K est le point d'intersection de l par le plan passant par O et \perp à l . En abaissant de M — $MF \perp \pi$, de O — $OS \perp \pi$, on obtient

$$\text{Sin}(\sigma, \tau) = \frac{MO}{MK}, \quad \text{Sin}(\pi, \sigma) = \frac{MI}{MK}, \quad \text{Sin}(\pi, \tau) = \frac{OS}{OK}, \quad r = OK,$$

$$d(\pi, \sigma) = \frac{MI}{OM \cdot OS}, \quad MI = d(M, \pi), \quad OS = d(O, \pi),$$

¹⁾ D. Mordoukhay-Boltovskoy. Sur les théorèmes métriques réciproques. Bulletin de la Société des naturalistes de l'Université de Varsovie. 1911.

et l'équation (37) se ramène à

$$\frac{d(N, \bar{\pi})}{d(M, \bar{\pi})} = \frac{1}{n} \sum \frac{d(N, \pi_i)}{d(M, \pi_i)}. \quad (40)$$

Il est intéressant, que le plan $\bar{\pi}$ ne depend pas de la position de O .

§ 7. Au moyen de la transformation (32) nous allons obtenir la généralisation des résultats des §§ 4,5.

Le faisceau de surfaces (16) devient

$$\Phi(x, y) + \lambda WT = 0, \quad (41)$$

$\Phi(x, y)$ étant polynome du 2 ordre de x, y, z . Il est formé par les surfaces passant par deux coniques:

$$\Phi(x, y) = 0, \quad W = 0, \quad \text{et} \quad \Phi(x, y) = 0, \quad T = 0.$$

On obtient le théorème suivant:

En coupant la cubique par des surfaces du second ordre passant par deux coniques nous avons tous les centres moyen-harmoniques des points d'intersection par rapport au plan de l'une d'elles sur une droite.

Cette droite peut être appelée polaire quadratique par rapport à ces coniques.

Nous avons le théorème réciproque:

En menant les plans osculateurs à la cubique et tangents à des surfaces du second ordre touchant deux cônes du second ordre, on a les plans moyen-harmoniques par rapport à un des sommets passant par un point.

De même on obtient la généralisation du théorème du § 5:

Le lieu des centres moyen-arithmétiques des points d'intersection des surfaces du second ordre par des cubiques passant par six points M_i ($i=1, 2, \dots, 6$) par rapport au plan $M_1 M_2 M_3$ est un plan.

§ 8. On peut encore indiquer une propriété des coniques gauches, qui a quelque analogie avec la propriété diamétrale des surfaces 2). La surface du troisième ordre passant par deux coniques

$$P = 0, \quad K = \lambda x + \mu y + \nu z + \pi = 0, \quad (42)$$

$$Q = 0, \quad L = x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad (43)$$

a l'équation

$$\Phi = P(x + \beta y + \gamma z + \delta) + Q(\lambda x + \mu y + \nu z + \pi) = 0 \quad (44)$$

et en même temps c'est la surface du 3 ordre la plus générale, qui passe par la cubique

$$P = 0, \quad Q = 0. \quad (45)$$

Elle est cylindrique, si $\beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \pi$ sont liés par des équations qu'on obtient de l'identité

$$f \frac{\partial \Phi}{\partial x} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

f, g , étant les coefficients angulaires des génératrices

$$\frac{x-x_0}{f} = \frac{y-y_0}{g} = \frac{z-z_0}{1}.$$

Si la direction de la génératrice est donnée (et par suite f, g) on a 6 équations linéaires entre $\beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \pi$ et l'on tire:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 + \beta_1 t, & \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1 t, \\ \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 t, & \mu &= \mu_0 + \mu_1 t, \\ \delta &= \delta_0 + \delta_1 t, & \nu &= \nu_0 + \nu_1 t, \\ & & \pi &= \pi_0 + \pi_1 t. \end{aligned}$$

Les plans $K=0$ et $L=0$ passent par deux droites. En appelant les plans, dont l'intersection par le cylindre du 3^e ordre passant par la cubique est une conique, plans principaux dans la direction f, g de ses génératrices, on peut énoncer, que

Les plans principaux dans une direction déterminée passent par deux droites.

La transformation homographique donne le même résultat pour les cônes avec le sommet donné.

On peut aussi construire les théorèmes réciproques.

